



Statistical Computing

Chap. 4.3: Markov Random Field

LIU, Ran

April 2, 2025

LIU, Ran - Department of Statistics @BNU

马尔可夫随机场模型

马尔可夫随机场 (Markov Random Field, MRF) 是一种 (无向) 图模型, 用于表示变量之间的空间依赖性。它的基本结构包括:

- 节点代表随机变量;
- 边表示变量之间的条件依赖;
- 局部条件概率描述整体联合分布;

MRF 广泛应用于图像分析、计算机视觉、自然语言处理等领域, 特别适合建模具有空间结构的数据。

Besag 在 1974 年发表的论文中首次系统提出了 MRF 在空间统计中的应用, 奠定了其理论基础。

Ran Liu - Department of Statistics @BNU

规则矩形晶格上的应用

为简化讨论，我们考虑 MRF 在规则矩形晶格上的建模。

- 将图像划分为像素网格，记第 i 个像素为 x_i ，共 n 个像素；
- 假设每个 $x_i \in \{0, 1\}$ ，构成一个二元随机场；
- 模型可扩展至多元离散值或连续取值；

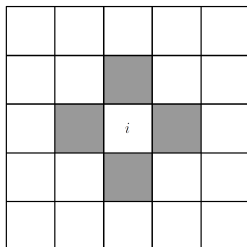
LIU, Ran - Department of Statistics @BNU

邻域定义

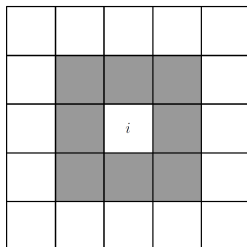
设 δ_i 为像素 i 的邻域像素集合，其中 $x_i \notin \delta_i$ 。

- 邻域定义需满足对称性：若 $j \in \delta_i$ ，则 $i \in \delta_j$ ；
- 常见邻域类型：
 - 一阶邻域：上下左右像素；
 - 二阶邻域：包括对角方向；

First Order



Second Order



局部马尔可夫性

MRF 满足局部马尔可夫性，即：

$$f(x_i | X_{-i}) = f(x_i | x_{\delta_i})$$

这表示在已知邻域像素值的情况下，其它像素对 x_i 的条件分布没有影响。

为保证条件分布有良好的定义，需联合分布正性成立，即：

- 每个状态 $x \in \mathcal{X}$ 的概率为正；
- X 的最小状态空间等于其组成部分的状态空间的笛卡尔积；

Hammersley-Clifford 定理

设 $P(X) > 0$ 是定义在无向图 G 上的联合分布。

Hammersley-Clifford 定理指出：

$$P(X) \text{ 满足图的马尔可夫性} \iff P(X) = \frac{1}{Z} \prod_{C \in \mathcal{C}} \phi_C(X_C)$$

其中：

- $\mathcal{C}$ 是图中的全部团 (cliques) (包含的节点可重复)
- $\phi_C(X_C)$ 是定义在团上的非负势函数。

其中团的定义：无向图 $G = (V, E)$ 中的团 C 是顶点的子集 $C \subseteq V$ ，并且每两个不同的顶点都是相邻的。

Ising 模型例子

Ising 模型是定义在无向图（通常为二维格点）上的马尔可夫随机场。每个节点表示一个二值变量 $X_i \in \{-1, +1\}$ ，边表示相邻变量之间的相互作用。

联合分布为（外场 Ising 模型，External Field）：

$$P(X) = \frac{1}{Z} \exp \left(\sum_{(i,j) \in E} w_{ij} X_i X_j + \sum_i b_i X_i \right)$$

也可写为势函数形式：

$$P(X) = \frac{1}{Z} \prod_{(i,j) \in E} \phi_{ij}(X_i, X_j) \prod_i \phi_i(X_i)$$

其中：

$$\phi_{ij}(X_i, X_j) = \exp(w_{ij} X_i X_j), \quad \phi_i(X_i) = \exp(b_i X_i)$$

Ising 模型中的团 (Clique)

团是图中任意两个节点都有边直接连接的子图。定理中关于的是所有团。

在二维格点图中：

- 每条边 (i, j) 形成一个大小为 2 的团。
- 每个节点 i 被视为大小为 1 的团 (单点团)，用于表示单变量势函数。
- 不存在大小为 3 的团，因为是标准 MRF，不是高阶的 MRF。

Ising 模型并不是只有一个团。

Liu, Ran - Department of Statistics @BNU

Ising 模型如何使用 H-C 定理

Ising 模型满足以下条件：

- 图是无向的。
- 联合分布 $P(X) > 0$ 。
- 条件独立性结构由图表示。

因此，根据 Hammersley-Clifford 定理，Ising 模型的联合分布可以表示为团的势函数乘积：

$$P(X) = \frac{1}{Z} \prod_{(i,j) \in E} \phi_{ij}(X_i, X_j) \prod_i \phi_i(X_i)$$

这正是 H-C 定理的直接应用。

无偏置项的 Ising 模型

我们可以只定义作用在边上的势函数 $\phi_{ij}(x_i, x_j)$ ，省略单变量势函数 $\phi_i(x_i)$ （默认这些势函数恒为 1）。这种形式对应于无外场的 Ising 模型：

$$P(X) = \frac{1}{Z} \exp \left(\sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_i x_j \right)$$

也可以写为：

$$P(X) = \frac{1}{Z} \prod_{(i,j) \in E} \phi_{ij}(x_i, x_j)$$

省略 $\phi_i(x_i)$ 相当于假设每个变量本身没有偏好（bias term，例如倾向于取 +1 或 -1，有外界磁场干扰）。

这样的模型仍然满足 Hammersley-Clifford 定理，因为它仍然是团势函数的乘积形式。

隐马尔可夫随机场

引入观测变量 $Y = (y_1, \dots, y_n)$, 真实图像为 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 。

- y_i : 受噪声影响的观测值;
- x_i : 对应的真实状态;
- X 为隐变量, 目标是估计其后验分布;

例如, 在生态学中:

- $y_i = 0$: 未观测到某物种;
- $x_i = 1$: 该物种实际存在;

Liu, Ran - Department of Statistics @BNU

模型假设与后验分布

我们采用以下假设：

- 条件独立性：给定 X ，各 y_i 独立；
- 联合似然为：

$$f(y|x) = \prod_{i=1}^n f(y_i|x_i)$$

- 目标是从后验分布中采样：

$$f(x|y) \propto f(y|x)f(x)$$

我们使用吉布斯采样器进行推断。

先验建模：成对差异

设 $i \sim j$ 表示像素 i 与 j 为邻居，定义先验为：

$$f(x) \propto \exp \left(- \sum_{i \sim j} \phi(x_i - x_j) \right)$$

其中：

- ϕ 是关于差异的函数；
- 通常为对 0 对称、随差异增大的非负函数；

Liu, Ran - Department of Statistics @BNU

吉布斯采样器

在每一步中，更新第 i 个像素：

$$X_i^{(t+1)} \sim f(x_i \mid x_{-i}^{(t)}, y)$$

只需知道该像素的邻域状态和观测值，即可计算条件分布。

LIU, Ran - Department of Statistics @BNU

简化似然函数

我们采用以下似然模型：

$$f(y|x) \propto \exp \left(\alpha \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{y_i = x_i\} \right)$$

其中：

- α ：匹配奖励参数；
- $\mathbb{I}\{y_i = x_i\}$ ：观测值与真实值是否一致；

在模拟中可设 $\alpha = 1$ 。

Liu, Ran - Department of Statistics @BNU

一致性先验示例

设先验为：

$$f(x) \propto \exp \left(\beta \sum_{i \sim j} \mathbb{I}\{x_i = x_j\} \right)$$

其中：

- β ：控制邻域一致性的参数；
- $\mathbb{I}\{x_i = x_j\}$ ：相邻像素是否一致；

较大的 β 值鼓励相邻像素状态相同。

后验分布为：

$$P(x|y) \propto f(y|x)f(x)$$

考虑第 i 个变量的条件分布：

$$P(x_i | x_{-i}, y) \propto f(y_i | x_i) \cdot \prod_{j \in \delta_i} \exp(\beta \mathbb{I}\{x_i = x_j\})$$

由于 $x_i \in \{0, 1\}$ ，我们只需计算两种可能下的非归一化概率：

$$P(x_i = 1 | \cdot) \propto \exp \left(\alpha \mathbb{I}\{y_i = 1\} + \beta \sum_{j \in \delta_i} \mathbb{I}\{x_j = 1\} \right)$$
$$P(x_i = 0 | \cdot) \propto \exp \left(\alpha \mathbb{I}\{y_i = 0\} + \beta \sum_{j \in \delta_i} \mathbb{I}\{x_j = 0\} \right)$$

将这两个值归一化后得到伯努利分布。

在吉布斯更新中，第 i 个像素取值为 1 的条件概率为：

$$P(X_i = 1 \mid X_{-i}, y) = \left(1 + \exp \left[\alpha (\mathbb{I}\{y_i = 0\} - \mathbb{I}\{y_i = 1\}) + \beta \sum_{j \in \delta_i} (\mathbb{I}\{x_j = 0\} - \mathbb{I}\{x_j = 1\}) \right] \right)^{-1}$$

该分布为伯努利分布，参数由邻域状态和观测决定。

LIU, Ran - Department of Statistics @BNU

隐马尔可夫随机场也被用在 MRI 图像分析 (衡量不确定性, $y_i|x_i$ 服从正态分布), 以及空间流行病学。

真实场景中可能存在如下挑战:

- 像素可能是连续变量;
- 观测值可能为概率而非二元量;

LIU, Ran - Department of Statistics @BNU

协变量建模

假设：

$$p(y_i = 1 \mid x_i = 1) = p_i$$

结合协变量 w_i ，可建立逻辑回归模型：

$$\log \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right) = w_i^T \beta + \nu_i$$

其中：

- β ：协变量系数；
- ν_i ：空间相关随机效应；

该模型广泛应用于空间流行病学等领域。